МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Астраханский государственный университет имени В.Н. Татищева»
(Астраханский государственный университет им. В.Н. Татищева)

Кафедра английской филологии

Письменный перевод

по книге Calculus

выходные данные USA, 2002

перевод стр. с 37 по 50

для сдачи кандидатского экзамена
по иностранному языку
(английский язык)

Выполнил:
Хужаева Аделя Ринатовна
кафедра математики и методики ее преподавания

Астрахань – 2022 г.

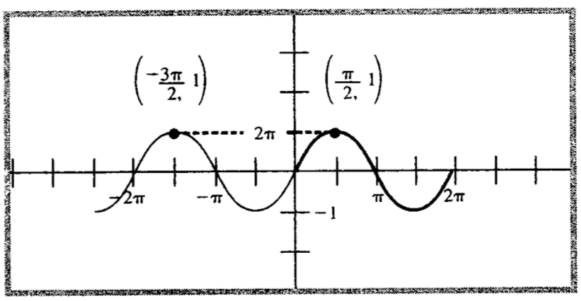
Chapter **Trigonometry: Last Stop Before Calculus**	**Глава** **Тригонометрия: Последняя остановка перед математическим анализом**
In This Chapter • Characteristics of periodic functions • The six trigonometric functions • The importance of the unit circle • Key trigonometric formulas and identities	**В этой главе** • Характеристики периодических функций • Шесть тригонометрических функций • Важность единичной окружности • Ключевые тригонометрические формулы и тождества
Trigonometry, the study of triangles, has been around for a long time, creeping mysteriously from shadow to shadow and occasionally snatching unwary students into its razor-sharp clutches and causing the end of their mathematics careers. Few things cause people to panic like trig does, with the exception of TV weatherman Al Roker.	Тригонометрия, наука о треугольниках, существует уже давно, таинственным образом переползая из тени в тень и время от времени захватывая неосторожных студентов в свои острые, как бритва, лапы и приводя к концу их карьеры математиков. Мало что вызывает у людей такую панику, как тригонометрия, за исключением телевизионного синоптика Эла Рокера.
It is a commonly held belief that children on All Hallow's Eve historically have marched from door to door, sacks in hand, chiming, "Trig or Treat!" In response, homeowners would reward them with small protractors and compasses to avoid the wrath of neighborhood pranksters. If all the children went away happily, it was a good "sine" for harvest. However, this myth is definitely untrue, and I have gone off on a tangent.	Широко распространено мнение, что дети в канун Дня всех святых исторически маршировали от двери к двери с мешками в руках, выкрикивая: "Тригонометрия или угощение!" В ответ домовладельцы награждали их маленькими транспортирами и циркулями, чтобы избежать гнева соседских шутников. Если все дети уходили счастливыми, это было хорошим «синусом» для сбора урожая. Однако этот миф определенно не соответствует действительности, и я отклонился от тангенса.

Getting Repetitive: Periodic Functions

There are six major trigonometric functions, at least three of which you have probably heard: sine, cosine, and tangent. All of the trigonometric functions (even those that are offended because you haven't heard of them) are periodic functions. A *periodic function* has the unique characteristic that it repeats itself after some fixed period of time. Think of the rising of the sun as a periodic function — every 24 hours (a fixed amount of time) the sun appears on the horizon.

The amount of horizontal space it takes until the function repeats itself is called the *period*. For the most basic trigonometric functions (sine and cosine), the period is 2π. Look at the graph in Figure 4.1 of one period of y = sin*x*.

Figure 4.1
*One period of y = sin*x.

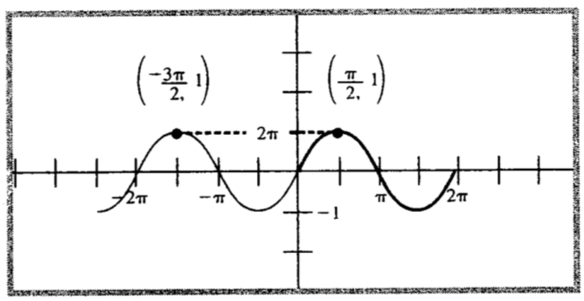


Становится повторяющимся: Периодические функции

Существует шесть основных тригонометрических функций, по крайней мере, три из которых вы, вероятно, слышали: синус, косинус и тангенс. Все тригонометрические функции (даже те, которые оскорблены тем, что вы о них не слышали) являются периодическими функциями. *Периодическая функция* обладает уникальной характеристикой, заключающейся в том, что она повторяется через некоторый фиксированный промежуток времени. Думайте о восходе солнца как о периодической функции — каждые 24 часа (фиксированный промежуток времени) солнце появляется на горизонте.

Количество горизонтального пространства, которое требуется до тех пор, пока функция не повторится, называется *периодом*. Для самых основных тригонометрических функций (синус и косинус) период равен 2π. Посмотрите на график на рисунке 4.1 одного периода y = sinx.

Рисунок 4.1
Один период y = sinx.



Talk the Talk	Поговорим о главном
A **periodic function's** values repeat over and over, at the same rate and at the same intervals in time. The length of the horizontal interval after which the function repeats is called the **period**.	Значения **периодической функции** повторяются снова и снова, с одинаковой скоростью и через одни и те же промежутки времени. Длина горизонтального интервала, после которого функция повторяется, называется **периодом**.
The graph of the sine function is a wave, reaching a maximum height of 1 and a minimum height of -1. On the piece of the graph shown above, the maximum height is reached at $x = -3\pi/2$ and $x = \pi/2$. The distance between these two points, where the graph repeats its value, is 2π. If that doesn't help you understand what is meant by period, consider the darkened portion of the graph.	График синусоидальной функции представляет собой волну, достигающую максимальной высоты в точке 1 и минимальной высоты в точке -1. На фрагменте графика, показанном выше, максимальная высота достигается при x = -3π/2 и x = π/2. Расстояние между этими двумя точками, где график повторяет свое значение, равно 2π. Если это не поможет вам понять, что подразумевается под периодом, рассмотрите затемненную часть графика
This piece begins at the origin (0,0) and wiggles up and down, returning to a height of 0 when $x = 2\pi$. True, the graph hits a height of 0, repeating its value, when $x = \pi$, but it hasn't completed its period yet — that is only finished at $x = 2\pi$.	Этот фрагмент начинается в начале координат (0,0) и перемещается вверх и вниз, возвращаясь к высоте в точке 0, когда x = 2π. Правда, график достигает высоты 0, повторяя свое значение, когда x = π, но он еще не завершил свой период — он заканчивается только при x = 2π.

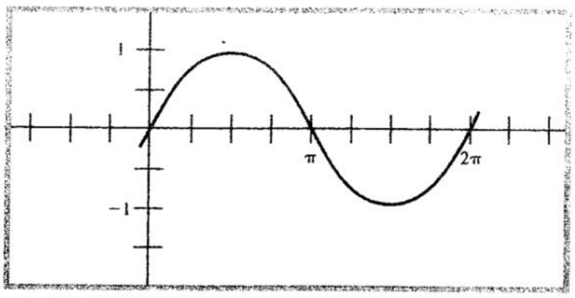
If you were to extend the graph of the sine function infinitely right and left, it would continue infinitely, redrawing itself every 2π. Because of this property of periodic functions, you can list an infinite number of inputs that have identical sine values. These are called *coterminal angles*, and the next example focuses on them.	Если бы вы расширили график синусоидальной функции бесконечно вправо и влево, он продолжался бы бесконечно, перерисовывая себя каждые 2π. Из-за этого свойства периодических функций вы можете перечислить бесконечное число вводных данных, которые имеют идентичные значения синуса. Они называются *котерминальными углами*, и следующий пример посвящен им.
Talk the Talk **Coterminal angles** have the same function value, because the space between them is a multiple of the function's period **Example 1:** List two additional angles (one positive and one negative) that have the same sine value as $\pi/4$. **Solution**: We know that sine repeats itself every 2π, so exactly 2π further up and down the *x*-axis from $\pi/4$, the value will be the same. To find these values, simply add 2π to $\pi/4$ in order to get one and subtract 2π from $\pi/4$ to get the other. In order to add and subtract the values, you'll have to get common denominators:	**Поговорим о главном** **Котерминальные углы** имеют одинаковое значение функции, поскольку расстояние между ними кратно периоду функции. **Пример 1**: Перечислите два дополнительных угла (один положительный и один отрицательный), которые имеют то же значение синуса, что и $\pi/4$. **Решение:** Мы знаем, что синус повторяется каждые 2π, поэтому ровно на 2π дальше вверх и вниз по оси x от $\pi/4$ значение будет одинаковым. Чтобы найти эти значения, просто добавьте 2π к $\pi/4$, чтобы получить одно, и вычтите 2π из $\pi/4$, чтобы получить другое. Чтобы сложить и вычесть значения, вам нужно будет получить общие знаменатели:

$\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{\pi}{4}+\frac{8\pi}{4}=\frac{9\pi}{4}$ $\frac{\pi}{4}-2\pi=\frac{\pi}{4}-\frac{8\pi}{4}=-\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{\pi}{4}+\frac{8\pi}{4}=\frac{9\pi}{4}$ $\frac{\pi}{4}-2\pi=\frac{\pi}{4}-\frac{8\pi}{4}=-\frac{7\pi}{4}$
Therefore, the angles and 9π/4 and -7π/4 are coterminal to π/4 and sin9π/4 = sin(-7π/4)= sinπ/4.	Следовательно, углы и 9π/4 и -7π/4 являются котерминальными углами с π/4, а sin9π/4 = sin(-7π/4)= sinπ/4
Introducing the Trigonometric Functions	**Знакомство с тригонометрическими функциями**
Time to meet the cast. There are six players in the drama we call trigonometry. You'll see a graph of each and learn a little something about the function. Whereas it's not extremely important to memorize the graphs of these functions, it's good to see how the graphs illustrate the functions' properties. So, here they are, in roughly the order of importance to you in your quest for calculus.	Время познакомиться с актерским составом. В драме, которую мы называем тригонометрией, шесть действующих лиц. Вы увидите график каждого из них и узнаете кое-что об каждой функции. Хотя запоминать графики этих функций не очень важно, полезно посмотреть, как графики иллюстрируют свойства функций. Итак, вот они, примерно в порядке важности для вас в вашем стремлении к математическому анализу.

Sine (Written as *y* = sin*x*)

The sine function is defined for all real numbers, and this unrestricted domain makes the function very trustworthy and versatile (see Figure 4.2). The range is $-1 \leq y \leq 1$, so all sine values fall within those boundaries. Notice that the sine function has a value of 0 whenever the input is a multiple of π. Sometimes, people get confused when memorizing unit circle values (more on the unit circle later in this chapter). If you remember the graph of sine, you can easily remember that sin0 = sinπ = sin2π = 0, because that's where the graph crosses the *x*-axis. The period of the sine function is 2π.

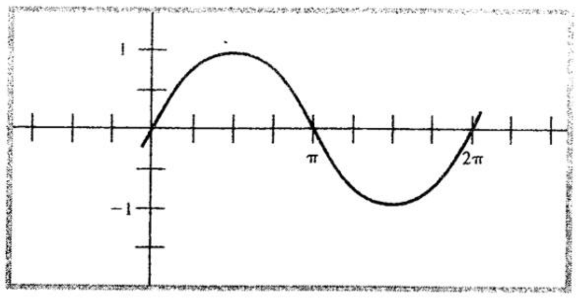
Figure 4.2 *The sine function.*

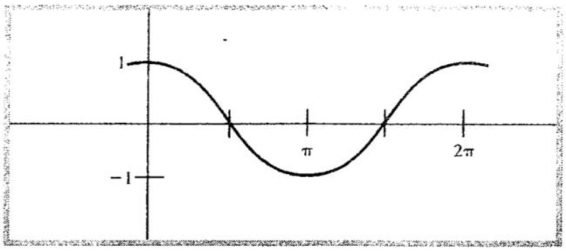
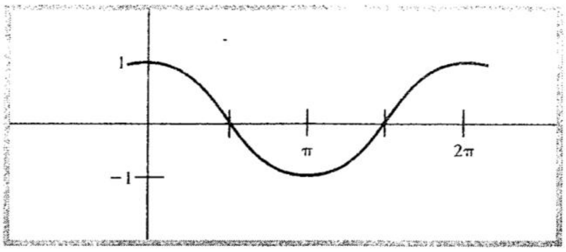


Синус (записывается как y = sinx)

Функция синуса определена для всех действительных чисел, и эта неограниченная область делает функцию очень надежной и универсальной (см. рис. 4.2). Интервал равен $-1 \leq y \leq 1$, поэтому все значения синуса попадают в эти границы. Обратите внимание, что функция синуса имеет значение 0 всякий раз, когда вводные данные кратны π. Иногда люди путаются при запоминании значений единичной окружности (подробнее о единичной окружности позже в этой главе). Если вы помните график синуса, вы можете легко вспомнить, что sin0 = sinπ = sin2π = 0, потому что именно там график пересекает ось x. Период синусоидальной функции равен 2π.

Рис. 4.2 *Синусоидальная функция.*



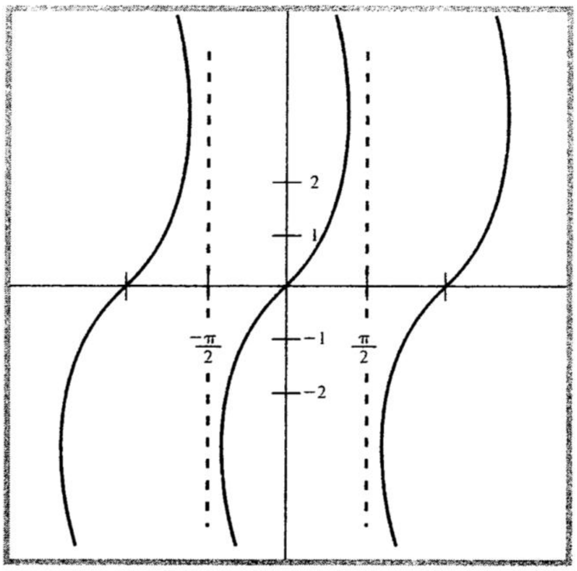
Cosine (Written as *y* = cos*x*) Cosine is the "cofunction" of sine (see Figure 4.3). (In other words, their names are the same, except one has a "co-" prefix, but I bet you figured that out.) As such, it looks very similar, possessing the same domain, range, and period. In fact, if you shift the entire graph of $y = \cos x$ a total of π/2 radians to the right, you get the graph of $y = \sin x$! The cosine has a value of 0 at all the "half-π's," such as π/2 and 3π/2. **Figure 4.3** *The cosine function.*  	**Косинус (записывается как y = cosx)** Косинус - это "кофункция" синуса (см. рис. 4.3). (Другими словами, их названия одинаковы, за исключением того, что у одного есть префикс "ко-", но, держу пари, вы это поняли.) Как таковой, он выглядит очень похожим, обладая теми же областью определения, интервалом и периодом. Фактически, если вы сдвинете весь график $y = \cos x$ в общей сложности на π/2 радиана вправо, вы получите график $y = \sin x$! Косинус имеет значение 0 во всех "половинках π", таких как π/2 и 3π/2. **Рисунок 4.3** *Функция косинуса.* 

Critical Point Throughout this book, I will refer to and evaluate trigonometric values in terms of radians, as they are used far more prevalently than degrees in calculus. Both degrees and radians are simply alternate ways to measure angles, just as Celsius and Fahrenheit are alternate ways to measure temperature. To get a rough idea of the conversion, remember that π radians = 180 degrees. If you want to convert from radians to degrees, multiply by $180/\pi$. For example, $\pi/2$ is equivalent to $\pi/2 * 180/\pi = 90$ degrees. To convert from degrees to radians, multiply by $\pi/180$.	**Важный момент** На протяжении всей этой книги я буду ссылаться на тригонометрические значения и оценивать их в радианах, поскольку они используются в исчислении гораздо чаще, чем градусы. И градусы, и радианы — это просто альтернативные способы измерения углов, точно так же, как градусы Цельсия и Фаренгейта — альтернативные способы измерения температуры. Чтобы получить приблизительное представление о преобразовании, помните, что π радиан = 180 градусам. Если вы хотите перевести из радианов в градусы, умножьте на $180/\pi$. Например, $\pi/2$ эквивалентно $\pi/2 * 180/\pi = 90$ градусов. Чтобы перевести градусы в радианы, умножьте на $\pi/180$.

Tangent (Written as *y* = tan*x*)

The tangent is defined as the quotient of the previous two functions: tan*x* = sin*x*/cos*x*. Thus, to evaluate tanπ/4, you'd actually evaluate sinπ/4/cosπ/4. (which will equal 1 for those of you who are curious, but more about that later). Because the cosine appears in the denominator, the tangent will be undefined whenever the cosine equals 0, which (according to the last section) is at the half-π's (see Figure 4.4). Notice that the graph of the tangent has vertical *asymptotes* at these values. The tangent equals 0 at each midpoint between the asymptotes. The domain of the tangent excludes the "half-π's," {…,-3π/2, -π/2, π/2, 3π/2,…}, but the range is all real numbers. The period of the tangent is π — notice that graph completes one complete version of itself between -π/2 and π/2.

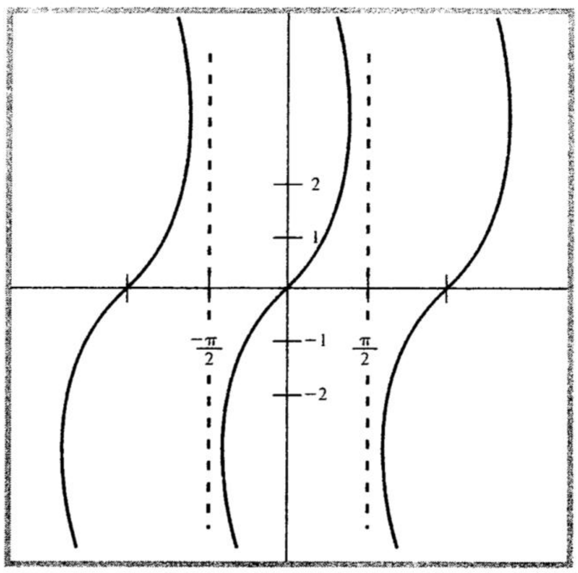
Figure 4.4
The tangent function.



Тангенс (записывается как *y* = tan*x*)

Тангенс определяется как частное от двух предыдущих функций: tan*x* = sin*x*/cos*x*. Таким образом, чтобы определить tanπ/ 4, вы на самом деле определили бы sinπ/4 / cosπ/4. (что будет равно 1 для тех из вас, кому интересно, но подробнее об этом позже). Поскольку косинус появляется в знаменателе, тангенс будет неопределенным всякий раз, когда косинус равен 0, который (согласно последнему разделу) находится на половине π (см. рис. 4.4). Обратите внимание, что график тангенса имеет вертикальные асимптоты при этих значениях. Тангенс равен 0 в каждой средней точке между асимптотами. Область тангенса исключает "половинные π", {..., -3π/2, -π/2, π/2, 3π/2,...}, но интервал — это все действительные числа. Период тангенса равен π — обратите внимание, что график завершает одну полную версию самого себя между -π/2 и π/2.

Рисунок 4.4
Функция тангенса.



Talk the Talk	Поговорим о главном
An **asymptote** is a line representing an unattainable value that shapes a graph. Because the graph cannot achieve the value, the graph typically bends toward that line forever and ever, yearning, reaching, stretching, but unable to reach it. A vertical asymptote typically indicates the presence of 0 in the denominator of a fraction. For example, the vertical line $x = \pi/2$ is a vertical asymptote of $y = \tan x$ because the tangent has 0 in the denominator whenever $x = \pi/2$.	**Асимптота** — это линия, представляющая недостижимое значение, которое формирует график. Поскольку график не может достичь значения, график обычно все время изгибается к этой линии, стремясь, достигая, растягиваясь, но он не в силах достичь ее. Вертикальная асимптота обычно указывает на наличие 0 в знаменателе дроби. Например, вертикальная линия $x = \pi/2$ является вертикальной асимптотой $y = \tan x$, потому что тангенс имеет 0 в знаменателе всякий раз, когда $x = \pi/2$.
Cotangent (Written as $y = \cot x$) The cofunction of tangent, cotangent, is the spitting image of tangent, with a few exceptions (see Figure 4.5). It, too, is defined by a quotient: $\cot x = \cos x/\sin x$. In fact, the cotangent is technically the *reciprocal* of the tangent, so you can also write $\cot x = 1/\tan x$. Therefore, this function is undefined whenever $\sin x = 0$, which occurs at all the multiples of π: $\{\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots\}$, so the domain includes all real numbers except that set. The range, like that of the tangent, is all real numbers, and the period, π, also matches the tangent's.	**Котангенс (записывается как $y = \cot x$)** Кофункция тангенса, котангенс, является точной копией тангенса, за некоторыми исключениями (см. рис. 4.5). Это тоже определяется коэффициентом: $\cot x = \cos x/\sin x$. Фактически, котангенс технически является обратной величиной тангенса, поэтому вы также можете записать $\cot x = 1/\tan x$. Следовательно, эта функция не определена всякий раз, когда $\sin x = 0$, что встречается при всех кратных π: $\{\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots\}$, поэтому область определения включает в себя все действительные числа, кроме этого множества. Интервал, как и интервал тангенса, представляет собой все действительные числа, а период π также совпадает с периодом тангенса.

Figure 4.5
The cotangent function.

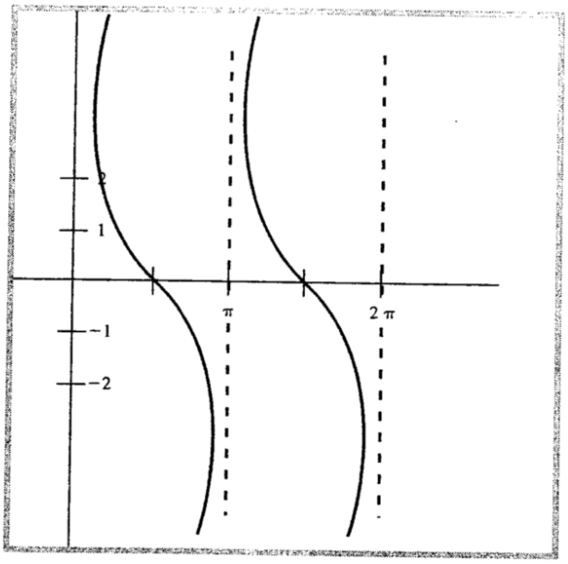
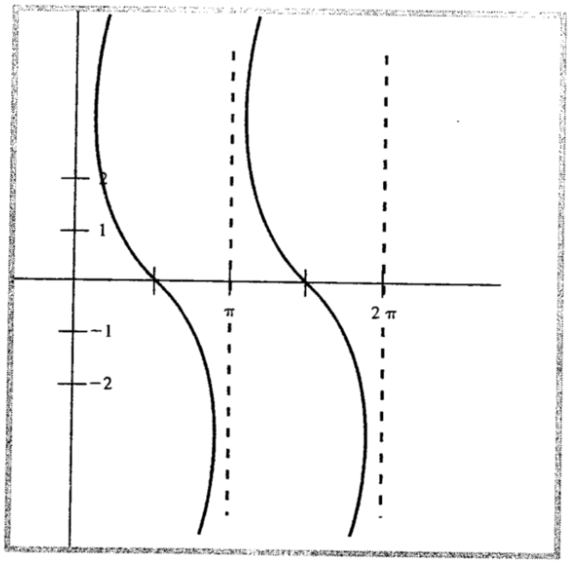
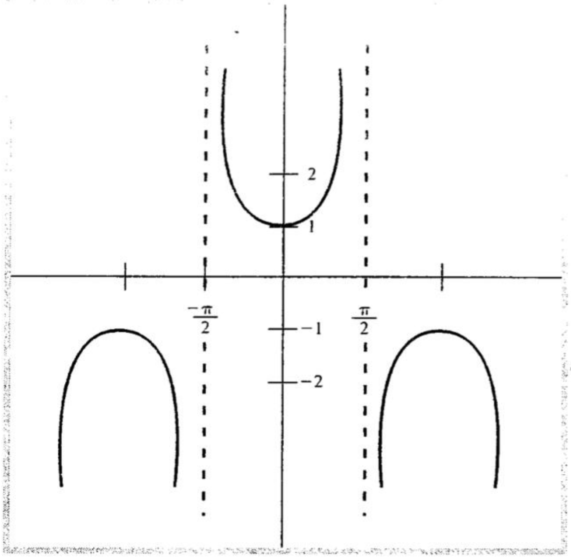
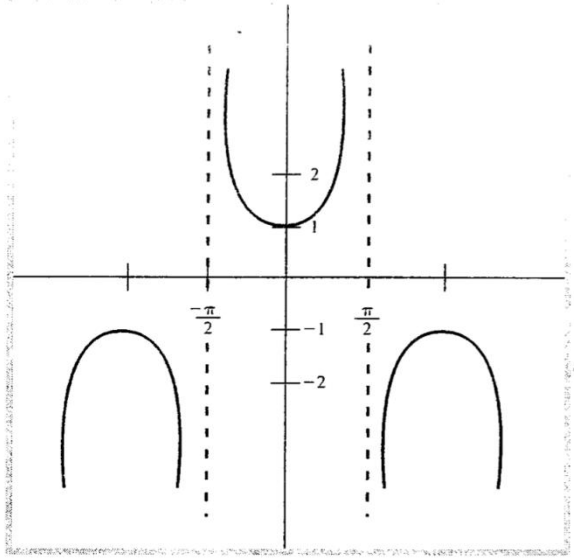


Рисунок 4.5
Функция котангенса.



Secant (Written as *y* = sec*x*)
The secant function is simply the reciprocal of the cosine, so sec*x* = 1/cos*x*. Therefore, the graph of the secant is undefined (has vertical asymptotes) at the same places (and for the same reasons) as the tangent, since they both have the same denominator (see Figure 4.6). Hence, the two functions also have the same domain. Notice that the secant has no *x*-intercepts. In fact, it doesn't even come close to the *x*-axis, only venturing as far in as 1 and -1. That's a fascinating comparison: The cosine has a range of $-1 \le y \le 1$, but the secant has a range of $y \le -1$ together with $y \ge 1$— almost the exact opposite. Because the secant is based directly on the cosine, the functions have the same period, 2π.

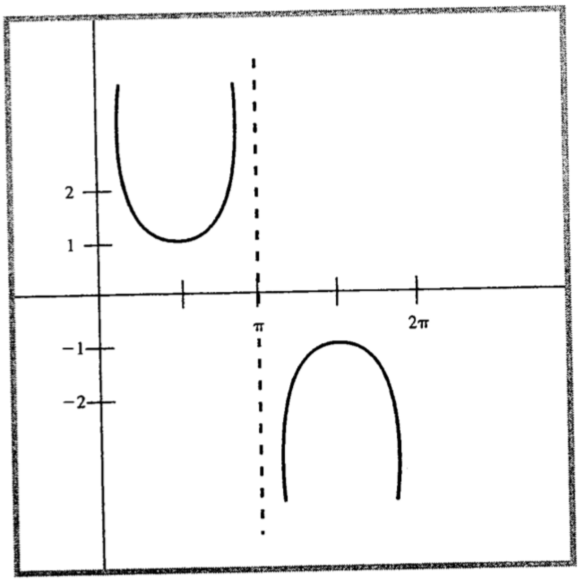
Секанс (записывается как *y* = sec*x*)
Секанс — это просто обратная величина косинуса, поэтому sec*x* = 1/cos*x*. Следовательно, график секанса не определен (имеет вертикальные асимптоты) в тех же местах (и по тем же причинам), что и тангенс, поскольку они оба имеют одинаковый знаменатель (см. рис. 4.6). Следовательно, эти две функции также имеют одну и ту же область определения. Обратите внимание, что секанс не имеет *x*-оси. На самом деле, он даже близко не подходит к оси *x*, заходя только в точках 1 и -1. Это увлекательное сравнение: косинус имеет интервал $-1 \le y \le 1$, но секанс имеет интервал $y \le -1$ вместе с $y \ge 1$ — почти полная противоположность. Поскольку секанс основан непосредственно на косинусе, функции имеют одинаковый период, 2π.

Talk the Talk The **reciprocal** of a fraction is the fraction flipped upside down (for example, the reciprocal of 7/4 is 4/7). The word *refliprocal* helps me remember what it means.	**Поговорим о главном** **Обратная** дробь — это перевернутая вверх ногами дробь (например, обратная дроби 7/4 равна 4/7). Слово "*перевернутый*" помогает мне вспомнить, что оно означает.
Figure 4.6 *The secant function* 	**Рисунок 4.6** *Функция секанса* 
Critical Point It's important to know how 0 affects a fraction. If 0 appears in the denominator of a fraction, that fraction is deemed «undefined». It is against math law to divide by 0, and the penalties are stiff (the same as ripping tags off of mattresses). On the other hand, if 0 appears in the numerator of a fraction (and not the denominator, too… that's still not allowed), then the fraction's value is 0, no matter how big a number is in the denominator.	**Важный момент** Важно знать, как 0 влияет на дробь. Если в знаменателе дроби появляется 0, эта дробь считается «неопределенной». Деление на 0 противоречит математическому закону, и наказание за это суровое (такое же, как срывание ярлыков с матрасов). С другой стороны, если 0 появляется в числителе дроби (и тоже не в знаменателе... это все равно запрещено), то значение дроби равно 0, независимо от того, насколько велико число в знаменателе.

Cosecant (Written as *y* = csc*x*) Very similar to its cofunction sister, this function has the same range and period as the secant, differing only in its domain. Because the cosecant is defined as the reciprocal of the sine, csc *x*= 1/sin *x,* the cosecant will have the same domain as the cotangent, as they share the same denominator (see Figure 4.7). In essence, four of the trig functions are based on the other two (sine and cosine), so those two alone are sufficient to generate values for the rest.	**Косекант (записывается как y = cscx)** Очень похожая на свою сестру по кофункции, эта функция имеет тот же интервал и период, что и вторая, отличаясь только своей областью определения. Поскольку косекант определяется как обратная синусу, csc *x* = 1/sin *x*, косекант будет иметь ту же область определения, что и котангенс, поскольку они имеют один и тот же знаменатель (см. рис. 4.7). По сути, четыре тригонометрические функции основаны на двух других (синус и косинус), поэтому только этих двух достаточно для генерации значений для остальных.
Kelley's Cautions The cosecant is not the reciprocal of the cosine. Many times, people pair these because they have the same initial sound, but it's wrong. Similarly, the secant is not the reciprocal of the sine, even though they have the same initial sound.	**Предостережения Келли** Косекант не является обратной величиной косинуса. Часто люди сочетают их, потому что у них одинаковый начальный звук, но это неправильно. Аналогично, секанс не является обратной величиной синуса, даже если у них одинаковый начальный звук.

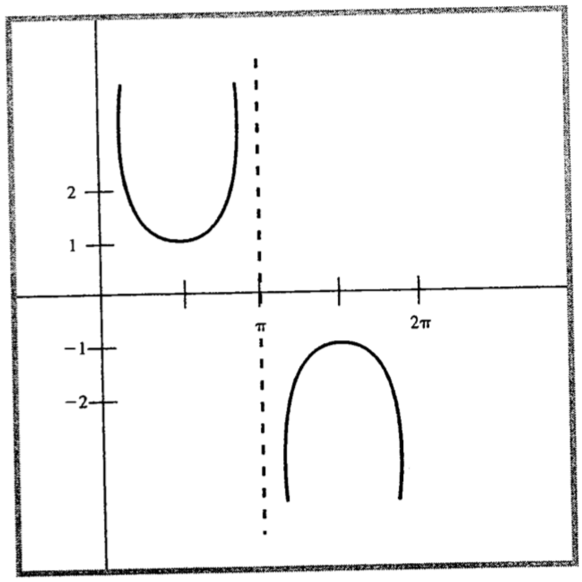
Example 2: If cosθ = 1/3 and sinθ = -√8/3, evaluate tan*θ* and sec*θ*. **Solution:** Let's tackle these one at a time. First of all, you know that tanθ = sinθ/cosθ, so: $\tan\theta = \dfrac{-\dfrac{\sqrt{8}}{3}}{\dfrac{1}{3}}$ Multiply the top and bottom by 3 to simplify the fraction and your final answer is … $\tan\theta = \dfrac{-\dfrac{\sqrt{8}}{3}}{\dfrac{1}{3}} \cdot \dfrac{\dfrac{3}{1}}{\dfrac{3}{1}} = -\sqrt{8}$ Now, on to secθ — this is even easier. Because you know that cosθ = 1/3, and secθ = 1/cosθ (because the secant is the reciprocal of the cosine): secθ = 1/1/3=3	**Пример 2:** Если cosθ = 1/3 и sinθ = -√8/3, вычислите tanθ и secθ. **Решение:** Давайте разберемся с ними по очереди. Прежде всего, вы знаете, что tanθ = sinθ/cosθ, так что: $\tan\theta = \dfrac{-\dfrac{\sqrt{8}}{3}}{\dfrac{1}{3}}$ Умножьте верхнюю и нижнюю части на 3, чтобы упростить дробь, и ваш окончательный ответ будет … $\tan\theta = \dfrac{-\dfrac{\sqrt{8}}{3}}{\dfrac{1}{3}} \cdot \dfrac{\dfrac{3}{1}}{\dfrac{3}{1}} = -\sqrt{8}$ Теперь перейдем к secθ — это еще проще. Потому что вы знаете, что cosθ = 1/3, а secθ = 1 / cosθ (потому что секанс является обратным косинусу): secθ = 1/1/3=3

Figure 4.7
The cosecant function.



What's Your Sine: The Unit Circle
No one expects you to be able to evaluate most trigonometric expressions off the top of your head. If someone held a gun to my head and asked me to evaluate cos3π/7 with an accuracy of .001, I would respond by calmly lying on the ground and beginning to draw a chalk outline around myself and preparing for death. I'd have no chance without a calculator or a Rainman-like ability for calculation. Most calculus classes, however, will require you to know certain trigonometric values without even a second thought.

Рисунок 4.7
Функция косеканса.



Каков ваш Синус: Единичная окружность
Никто не ожидает, что вы сможете определить большинство тригонометрических выражений с ходу. Если бы кто-то приставил пистолет к моей голове и попросил меня определить cos3π/7 с точностью до 0,001, в ответ я бы спокойно лег на землю, начал рисовать мелом контур вокруг себя и готовился к смерти. У меня не было бы никаких шансов без калькулятора или способности к вычислениям, подобной способности Человека дождя. Однако большинство математических расчётов требуют, чтобы вы знали определенные тригонометрические значения, даже не задумываясь.

These values are derived from something called the *unit circle*, a circle with a radius of length 1 that generates common cosine and sine values. You don't really have to know how to get those values (or how the unit circle works), but you should have these values memorized. Make flash cards, recite them with a partner, get a tattoo — whatever method you use to remember things — but memorize the unit circle values in the chart in Figure 4.8.

Эти значения получены из так называемой *единичной окружности*, окружности с радиусом длины 1, которая генерирует общие значения косинуса и синуса. На самом деле вам не обязательно знать, как получить эти значения (или как работает единичная окружность), но вы должны запомнить эти значения. Сделайте флэш-карты, повторите их с партнером, сделайте татуировку — какой бы метод вы ни использовали для запоминания вещей, — но запомните значения единичного круга в таблице на рисунке 4.8.

Talk the Talk

The **unit circle** is a circle whose radius is 1 unit that can be used to generate the most common values of sine and cosine. Rather than generating them each time you need them, it's best to simply memorize those common values.

Поговорим о главном

Единичная окружность — это окружность, радиус которой равен 1 единице, которую можно использовать для генерации наиболее распространенных значений синуса и косинуса. Вместо того чтобы генерировать их каждый раз, когда они вам понадобятся, лучше просто запомнить эти общие значения.

Figure 4.8

The confounded unit circle, a necessary evil to calculus. Memorize it now and avoid trauma in the future.

Angle (radians)	cosine	sine	Angle (radians)	cosine	sine
0	1	0	π	-1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{-1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	$\frac{3\pi}{2}$	0	-1
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{2}$

Рисунок 4.8

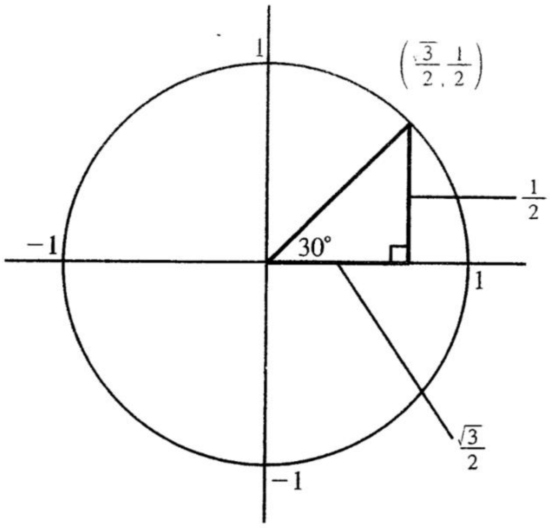
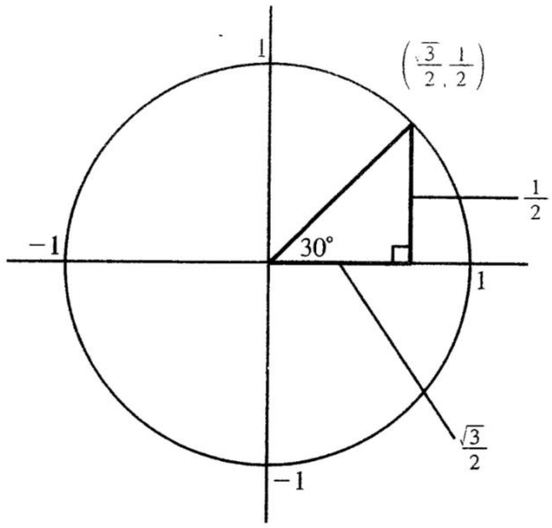
Проклятая единичная окружность, неизбежное зло для вычислений. Запомните ее сейчас и избегайте травм в будущем.

Углы (радианы)	Косинус	Синус	Углы (радианы)	Косинус	Синус
0	1	0	π	-1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{-1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	$\frac{3\pi}{2}$	0	-1
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{2}$

If you're having trouble remembering the unit circle, look for patterns. If you absolutely refuse to memorize these values and it's okay with your instructor that you don't, at the very least keep this chart in a handy place, because you'll find yourself consulting it often.	Если у вас возникли проблемы с запоминанием единичной окружности, поищите шаблоны. Если вы категорически отказываетесь запоминать эти значения, и ваш преподаватель не возражает, чтобы вы этого не делали, по крайней мере, держите эту таблицу в удобном месте, потому что вам придется часто сверяться с ней.
Now that you know the unit circle and all kinds of crazy stuff about trig functions, your powers have increased. (Just make sure you always use them for good, not evil.) In fact, you are able to evaluate a lot more functions, as demonstrated by the next example.	Теперь, когда вы знаете единичную окружность и всевозможные безумные вещи о тригонометрических функциях, ваши способности возросли. (Просто убедитесь, что вы всегда используете их во благо, а не во зло.) На самом деле, вы можете определить гораздо больше функций, как показано в следующем примере.
Example 3: Find the value of cos23π/4. **Solution:** We only know the values of sine and cosine from 0 radians to 11π/6 radians. Clearly, 23π/4 is much too large to fit in this limited interval. However, because cosine is a periodic function, its values will repeat. Since cosine's period is 2π, you can find a coterminal angle to 23π/4 which does appear in our unit circle chart and evaluate that one instead — the answer will be the same.	**Пример 3:** Найдите значение cos23π/4. **Решение:** Мы знаем только значения синуса и косинуса от 0 радиан до 11π/6 радиан. Очевидно, что 23π/4 слишком велико, чтобы поместиться в этом ограниченном интервале. Однако, поскольку косинус является периодической функцией, его значения будут повторяться. Поскольку период косинуса равен 2π, вы можете найти котерминальный угол до 23π/4, который действительно отображается на нашей единичной окружности, и определить его вместо этого — ответ будет тем же самым.

According to Example 1 in this chapter, all you have to do is add or subtract the period (again, it is 2π for cosine) and you'll get a coterminal angle. I am looking for a smaller angle than $23\pi/4$, so I'll subtract 2π. Don't forget to get common denominators to subtract correctly: $23\pi/4 - 2\pi = 23\pi/4 - 8\pi/4 = 15\pi/4$ That's still too big (the largest $\pi/4$ angle I have memorized is $7\pi/4$), so I have to subtract again: $15\pi/4 - 8\pi/4 = 7\pi/4$ Because $7\pi/4$ and $23\pi/4$ are coterminal, $\cos 7\pi/4 = \cos 23\pi/4$, which we know to be $\sqrt{2}/2$.	Согласно примеру 1 в этой главе, все, что вам нужно сделать, это добавить или вычесть период (опять же, это 2π для косинуса), и вы получите котерминальный угол. Я ищу угол меньший, чем $23\pi/4$, поэтому я вычту 2π. Не забудьте получить общие знаменатели для правильного вычитания: $23\pi/4 - 2\pi = 23\pi/4 - 8\pi/4 = 15\pi/4$ Это все еще слишком много (самый большой угол $\pi/4$, который я запомнил, равен $7\pi/4$), поэтому мне приходится вычитать снова: $15\pi/4 - 8\pi/4 = 7\pi/4$ Поскольку $7\pi/4$ и $23\pi/4$ являются котерминальными углами, $\cos 7\pi/4 = \cos 23\pi/4$, что, как мы знаем, равно $\sqrt{2}/2$.
You've Got Problems Problem 1: Evaluate $\cos 14\pi/4$ using a coterminal angle and the unit circle.	**У тебя проблемы** Задача 1: Вычислите $\cos 14\pi/4$, используя котерминальный угол и единичную окружность.

You might be interested in how the unit circle originates and how the previous values are derived. Here's a quick explanation. A unit circle is just a circle with radius one, and we'll center it at the origin. Now, draw a ray from the origin that makes a 30-degree ($\pi/6$-radian) angle with the positive x-axis in the first quadrant, and mark the point where the ray intersects the circle. The coordinates of that point are, respectively, the cosine and sine of $\pi/6$. To find the coordinates of the point, find the lengths of the legs of the right triangle shown in Figure 4.9.	Возможно, вас заинтересует, как возникает единичная окружность и как выводятся предыдущие значения. Вот краткое объяснение. Единичная окружность — это просто окружность с радиусом один, и мы будем центрировать ее в начале координат. Теперь нарисуем луч от начала координат, который образует угол в 30 градусов ($\pi/6$ радиан) с положительной осью x в первом квадранте, и отметим точку, где луч пересекает окружность. Координатами этой точки являются, соответственно, косинус и синус $\pi/6$. Чтобы найти координаты точки, найдем длины катетов прямоугольного треугольника, показанного на рисунке 4.9.
Incredibly Important Identities An identity is an equation that is always true, regardless of the input. It's easy to tell that, according to this definition, $x + 1 = 7$ is not an identity, because it is only true when $x = 6$. However, consider the equation $2(x - 1) + 3 = 2x + 1$. If you plug in $x = 0$, you get $1 = 1$, which is definitely true, wouldn't you agree? Try plugging any real number, and you'll get another true statement. Thus, $2(x - 1) + 3 = 2x + 1$ is an identity.	**Невероятно важные тождества** Тождество — это уравнение, которое всегда верно, независимо от вводных данных. Легко сказать, что, согласно этому определению, $x + 1 = 7$ не является тождеством, потому что это верно только тогда, когда $x = 6$. Однако рассмотрим уравнение $2(x - 1) + 3 = 2x + 1$. Если вы вводите $x = 0$, вы получаете $1 = 1$, что определенно верно, вы согласны? Попробуйте ввести любое действительное число, и вы получите еще одно истинное утверждение. Таким образом, $2(x - 1) + 3 = 2x + 1$ — это тождество.

Figure 4.9 *This right triangle, inscribed on the unit circle, determines the values of cosine and sine for the angle at the origin.* 	**Рисунок 4.9** *Этот прямоугольный треугольник, вписанный в единичную окружность, определяет значения косинуса и синуса для угла в начале координат.* 
It is worth mentioning that it is a very stupid identity. You are not going to impress anyone by showing that equation off. With only two seconds' worth of work, you can simplify the left side and show the two sides equal. Most math identities are much more useful because it's not immediately obvious that they are true. Specifically, trigonometric identities help you rewrite equations, simplify expressions, and justify answers to equations. With this in mind, we'll explore the most common trigonometric identities. They're worth memorizing if you don't know them already.	Стоит отметить, что это очень глупое тождество. Вы ни на кого не произведете впечатления, демонстрируя это уравнение. Потратив всего две секунды на работу, вы можете упростить левую сторону и показать, что две стороны равны. Большинство математических тождеств гораздо более полезны, потому что не сразу очевидно, что они истинны. В частности, тригонометрические тождества помогают вам переписывать уравнения, упрощать выражения и обосновывать ответы на уравнения. Имея это в виду, мы рассмотрим наиболее распространенные тригонометрические тождества. Их стоит запомнить, если вы их еще не знаете.

Pythagorean Identities The three most important of all the trig identities are the Pythagorean identities. They are named as such because they are created with the Pythagorean theorem. Remember that little nugget from geometry? It said that the sum of the squares of the legs of a right triangle is equal to the square of the hypotenuse: $a^2 + b^2 = c^2$. Ever since I taught these three, I have named them the Mama, Papa, and Baby theorems respectively (after the Three Bears story), both for entertainment purposes and because they have no commonly accepted names. If I were in the company of math nerds, however, I wouldn't use the terms if I were you. They will sneer and scowl at you. • Mama theorem: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ • Papa theorem: $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ • Baby theorem: $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$	**Пифагорейские тождества** Три наиболее важных из всех тригонометрических тождеств — это тождества Пифагора. Они названы так потому, что созданы с помощью теоремы Пифагора. Помните тот маленький самородок из геометрии? В нем говорилось, что сумма квадратов катетов прямоугольного треугольника равна квадрату гипотенузы: $a^2 + b^2 = c^2$. С тех пор как я научил этим трем теоремам, я назвал их теоремами Мамы, Папы и Малыша соответственно (в честь истории о трех медведях), как в развлекательных целях, так и потому, что у них нет общепринятых названий. Однако, если бы я был в компании математических ботаников, я бы на вашем месте не использовал эти термины. Они будут насмехаться и сердиться на вас. • Теорема Мамы: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ • Теорема Папы: $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ • Теорема Малыша: $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
You've Got Problems Problem 2: The Mama theorem is an identity, and therefore true for every input. Show that it is true for $x = 2\pi/3$.	**У тебя проблемы** Задача 2: Теорема Мамы является тождеством и, следовательно, верна для каждых вводных данных. Докажите, что это верно для $x = 2\pi/3$.

Critical Point Those *Wizard of Oz* fans out there may remember that the Scarecrow spouts a formula when the Great and Powerful Oz grants him a brain. He states, "The sum of the square roots of any two sides of an isosceles triangle is equal to the square root of the remaining side." This is a false statement! He was probably supposed to quote the Pythagorean theorem, since it is one of the most recognizable theorems to the general public, but missed it quite badly. Perhaps Oz was not so powerful after all. The Tin Man's string of failed marriages and the Cowardly Lion's lack of success as a motivational speaker offer further evidence to Oz's lackluster gift giving.	**Важный момент** Поклонники "Волшебника страны Оз", возможно, помнят, что Страшила произносит формулу, когда Великий и Могущественный Оз дарует ему мозг. Он утверждает: "Сумма квадратных корней из любых двух сторон равнобедренного треугольника равна квадратному корню из оставшейся стороны". Это ложное утверждение! Вероятно, он должен был процитировать теорему Пифагора, поскольку это одна из самых узнаваемых теорем для широкой публики, но он довольно ошибся. Возможно, Оз в конце концов не был таким уж могущественным. Череда неудачных браков Железного Дровосека и неуспех Трусливого Льва в качестве мотивационного оратора являются еще одним доказательством того, что Оз дарит подарки, которые быстро канут в небытие.
Now, let's see how trigonometric functions and identities can make our lives easier. With a little knowledge of trigonometry and a little bit of elbow grease, even ugly expressions can be made beautiful.	Теперь давайте посмотрим, как тригонометрические функции и тождества могут облегчить нашу жизнь. Немного разбираясь в тригонометрии и немного смазав локти, можно сделать красивыми даже уродливые выражения.

Example 4: Simplify the trigonometric expression $\cos^2 x/\sin x + \sin x$ using a Pythagorean identity. **Solution:** One of these terms is a fraction. You know that you must first have common denominators in order to add fractions, so multiply the second term by $\sin x/\sin x$ to get his-and-hers matching denominators of $\sin x$: $\frac{\cos^2 x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1} \cdot \frac{\sin x}{\sin x}$ $\frac{\cos^2 x}{\sin x} + \frac{\sin^2 x}{\sin x}$	**Пример 4:** Упростите тригонометрическое выражение cos2x/sin x + sinx, используя тождество Пифагора. **Решение:** Одним из членов выражения является дробь. Вы знаете, что сначала у вас должны быть общие знаменатели, чтобы сложить дроби, поэтому умножьте второй член уравнения на sinx/sinx, чтобы получить его-и-ее совпадающие знаменатели sinx: $\frac{\cos^2 x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1} \cdot \frac{\sin x}{\sin x}$ $\frac{\cos^2 x}{\sin x} + \frac{\sin^2 x}{\sin x}$
Now that the denominators match, we can perform the addition in the numerator while leaving the denominator alone: $\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x}$	Теперь, когда знаменатели совпадают, мы можем выполнить сложение в числителе, оставив знаменатель в покое: $\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x}$

That doesn't look any easier! Hold on a second. The numerator looks just like the Mama theorem, and according to the Mama theorem we know that $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Therefore, substitute 1 in for the numerator: 1/sin*x* We could stop there, but we're on a roll! We also know that 1/sin*x* = csc*x*, since the cosecant is the reciprocal of the sine. Therefore, the final answer is csc*x*.	Это выглядит ничуть не проще! Подождите секунду. Числитель выглядит точно так же, как теорема Мамы, и согласно теореме Мамы мы знаем, что $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Поэтому подставьте 1 в числитель: 1/sinx Мы могли бы остановиться на этом, но мы в ударе! Мы также знаем, что 1/sinx = csc*x*, поскольку косекант является обратной величиной синуса. Следовательно, окончательный ответ — csc*x*.
Kelley's Cautions The notation $\cos^2 x$ is shorthand notation for $(\cos x)^2$ wouldn't make any sense for the letters *cos* to be squared, as you might expect. The shorthand notation is used to avoid having to write those extra parentheses.	**Предостережения Келли** Обозначение $\cos^2 x$, являясь сокращенным обозначением для $(\cos x)^2$, не имело бы никакого смысла, если бы буквы *cos* были возведены в квадрат, как вы могли бы ожидать. Сокращенное обозначение используется для того, чтобы избежать необходимости писать эти дополнительные круглые скобки.
Double-Angle Formulas These identities allow you to write trigonometric expressions containing double angles (such as sin2*x* and cos2θ) into equivalent single-angle expressions. In other words, these expressions eliminate the *x* coefficient of 2 inside a trigonometric expression.	**Формулы двойного угла** Эти тождества позволяют записывать тригонометрические выражения, содержащие двойные углы (такие как sin2x и cos2θ), в эквивалентные одноугольные выражения. Другими словами, эти выражения исключают коэффициент x, равный 2, внутри тригонометрического выражения.
• sin2x = 2sin*x*cos*x* (This is the simplest double-angle formula, and memorizing it is a snap.) • $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $= 2\cos^2 x - 1$ $= 1 - 2\sin^2 x$	• sin2x = 2sin*x*cos*x* (Это самая простая формула двойного угла, и запомнить ее совсем несложно.) • $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $= 2\cos^2 x - 1$ $= 1 - 2\sin^2 x$

The cosine double-angle is a little trickier — there are actually three different things which can be substituted for cos2x. You should choose which to substitute in based on the rest of the problem. If there seem to be a lot of sines in the equation or expression, use the last of the three, for example.	Двойной угол косинуса немного сложнее — на самом деле есть три разные вещи, которые можно заменить на cos2x. Вы должны выбрать, что заменить, основываясь на остальной части задачи. Если кажется, что в уравнении или выражении много синусов, используйте, например, последний из трех.
There isn't a whole lot to understand about double-angle formulas. You should just be ready to recognize them at a moment's notice, as problems very rarely contain the warning label, "Caution: This problem will require you to know basic trig double-angle formulas. Keep away from eyes. May pose a choking hazard to children under 3." Watch how slyly these suckers slip in there.	В формулах двойного угла не так уж много нужно понимать. Вы просто должны быть готовы распознать их в любой момент, так как задачи очень редко содержат предупреждающую надпись: "Внимание: Эта задача потребует от вас знания основных тригонометрических формул двойного угла. Держите подальше от глаз. Может представлять опасность удушья для детей младше 3 лет." Смотрите, как ловко эти неудачники проскальзывают туда.
Example 5: Factor and simplify the expression $\cos^4\theta - \sin^4\theta$. **Solution:** This expression is the difference of perfect squares, so it can be factored as follows: $(\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$. Notice that the left-hand quantity is equal to 1, according to the Mama theorem, and the right-hand quantity is equal to cos2x, according to our double-angle formulas. Therefore, we can substitute those values to get (1)(cos2x) = cos2x.	**Пример 5:** Разложите на множители и упростите выражение $\cos^4\theta - \sin^4\theta$. **Решение:** Это выражение представляет собой разность полных квадратов, поэтому его можно разложить следующим образом: $(\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$. Обратите внимание, что левая величина равна 1, согласно теореме Мамы, а правая величина равна cos2x, исходя из наших формул двойного угла. Следовательно, мы можем подставить эти значения, чтобы получить (1)(cos2x) = cos2x.

Critical Point There are a lot of trig identities — not just the few in this chapter — but you'll use these tar more than all the rest put together.	**Важный момент** Существует множество тригонометрических тождеств — не только те, что описаны в этой главе, — но вы будете использовать эти тождества чаще, чем все остальные вместе взятые.
You've Got Problems **Problem 3:** Factor and simplify the expression 2sinxcosx - $4\sin^3x$ cosx.	**У тебя проблемы** **Задача 3:** Разложите на множители и упростите выражение 2sinxcosx - $4\sin^3x$ cosx.
Solving Trigonometric Equations The last really important trig skill you need to possess is the ability to solve trigonometric equations. A word of warning: Some math teachers get very bent out of shape when discussing trig equations. You will have to read the directions to these sorts of problems very carefully to make sure to answer the exact question being asked of you.	**Решение тригонометрических уравнений** Последний действительно важный навык тригонометрии, которым вам нужно обладать, — это умение решать тригонометрические уравнения. Небольшое предупреждение: некоторые учителя математики выходят из себя, обсуждая тригонометрические уравнения. Вам придется очень внимательно прочитать указания к таким задачам, чтобы точно ответить на заданный вам вопрос.

Critical Point When intervals are specified as $[0,2\pi)$, that is shorthand for $0 \leq x < 2\pi$. The two numbers in the notation represent the lower and higher boundaries of the acceptable interval, and the bracket or parenthesis tells you if that boundary is included in the interval or not. If it's a bracket, that boundary is included, but not so with a parenthesis. In interval notation, the expression $x \geq 7$ looks like $[7,\infty)$. Because there is no upper bound, you write infinity. If infinity is one of the boundaries, you always use a parenthesis next to it.	**Важный момент** Когда интервалы задаются как $[0,2\pi)$, это сокращение для $0 \leq x < 2\pi$. Два числа в обозначении представляют нижнюю и верхнюю границы допустимого интервала, а скобка или круглые скобки указывают вам, включена ли эта граница в интервал или нет. Если это квадратная скобка, то эта граница включена, но все по-другому с круглой скобкой. В интервальном обозначении выражение $x \geq 7$ выглядит как $[7,\infty)$. Поскольку верхней границы нет, вы пишете бесконечность. Если бесконечность является одной из границ, вы всегда используете круглую скобку рядом с ней.
Kelley's Cautions If your instructor demands one answer per equation, eliminate all of your solutions except for the one (and there will only be one) that falls into the appropriate range. That range is $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ for sine, tangent, and cosecant; for cosine, cotangent, and secant, use the interval of $0 \leq \theta \leq \pi$.	**Предостережения Келли** Если ваш преподаватель требует одного ответа на каждое уравнение, исключите все ваши решения, кроме того (и будет только одно), которое попадает в соответствующий интервал. Этот интервал равен $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ для синуса, тангенса и косеканса; для косинуса, котангенса и секанса используйте интервал $0 \leq \theta \leq \pi$.

Each of my examples will ask for the solution to the trigonometric equation on the interval [0, 2π]. Therefore, there may be multiple answers. Some instructors will demand that you write the specific correct answer for each equation. In other words, although there may be many angles that solve the problem, they only accept one or two answers. This answer falls within a specific range, and as long as you learn the appropriate range for each trigonometric function, you'll be okay. The best approach is to ask if they'll require answers on a certain interval or if they expect only the answer on the appropriate range.	В каждом из моих примеров будет запрашиваться решение тригонометрического уравнения на интервале [0, 2π]. Следовательно, ответов может быть несколько. Некоторые преподаватели потребуют, чтобы вы написали конкретный правильный ответ для каждого уравнения. Другими словами, хотя может быть много точек зрения, которые решают задачу, они принимают только один или два ответа. Этот ответ попадает в область определения, и пока вы изучаете соответствующую область определения для каждой тригонометрической функции, с вами все будет в порядке. Лучший подход — спросить, потребуются ли им ответы в определенном интервале или они ожидают только ответ в соответствующей области определения.