

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Астраханский государственный университет»  
(Астраханский государственный университет)

*кафедра философии*

## РЕФЕРАТ

**для сдачи кандидатского экзамена  
по истории и философии науки**

**на тему: «Исторические аспекты изучения объёмов  
многогранников и круглых тел в средней школе»**

**Выполнил:**

ФИО Каюпова Айслу Александровна

*кафедра Математики и  
методики ее преподавания*

Астрахань – 2020 г.

## Оглавление

Астрахань – 2020 г.....	0
Введение.....	2
Исторические аспекты изучения объемов многогранников и круглых тел.....	4
Подходы к определению многогранника и его объема.....	14
Методика изучения темы «объем многоугольников и круглых тел».....	17
Анализ учебной программы.....	20
Заключение.....	27
Список литературы.....	29

## Введение

Тема «Объемы многогранников и круглых тел» является одной из основных тем традиционного школьного курса геометрии. Можно сказать, что они являются центральным предметом стереометрии. Изучение прямых и плоскостей, параллельных и перпендикулярных, двугранных углов и т.д.

Центральная роль многогранников заключается, прежде всего в том, что многие результаты по отношению к другим телам получены из соответствующих результатов для многогранников; достаточно вспомнить определение объемов и поверхностей тел пограничным переходом многогранников.

Кроме того, сами многогранники представляют собой чрезвычайно важный предмет исследования, выделяющийся среди всех тел многими интересными свойствами, в частности соответствующими теоремами и проблемами. Можно, например, вспомнить теорему Эйлера о количестве граней, ребер и вершин, симметрию правильных многогранников, вопрос о заполнении пространства многогранниками.

Многогранникам следует уделять больше внимания в школьном курсе, так как они дают особенно богатый материал для развития пространственных представлений, для развития связи живого пространственного воображения со строгой логикой, которая и есть суть геометрии. Простейшие факты о многогранниках уже требуют такой связи, что довольно непросто. Даже такой простой факт, как пересечение параллелепипедных диагоналей в какой-то момент времени, требует воображения, чтобы увидеть его визуально, и требует строгого доказательства.

Кроме того, использование многогранников с самого начала исследования стереометрии служит различным дидактическим средствам. На многогранниках целесообразно продемонстрировать расположение прямых и плоскостей в пространстве, показать использование признаков параллелизма

и перпендикулярности, прямых и плоскостей в пространстве. Иллюстрирование первых стереометрических теорем на конкретных моделях повышает интерес учащихся к предмету.

Одной из основополагающих задач преподавания математики является развитие абстрактного мышления учащихся. Эта цель в значительной степени способствует использованию наглядных пособий не только в начальных классах, но и в средних.

Тема "Объемы многогранников и круглых тел" предоставляет большое количество возможностей для достижения этой цели. В процессе изготовления моделей многогранников, помимо теоретических знаний и навыков, учащиеся закрепляют новые концепции, сформированные чертежом и реальным решением строительных задач. При изготовлении моделей самостоятельно изображение создается на несколько частей, поэтому с ними можно проводить различные манипуляции. При этом все их свойства и особенности легко усваиваются и прочно закрепляются в памяти учеников.

Объектом данной работы является процесс обучения стереометрии в средней школе.

Предметом исследования является изучение объемов многогранников и круглых тел.

Задачи исследования:

- Анализ педагогической, методической, научно-педагогической и математической литературы по предмету исследования.
- Проанализировать учебную программу по математике для 10 и 11 классов и серию учебников по геометрии в соответствии с учебным планом.
- Определить различные подходы к определению понятия «Объемы многогранников».
- Изучение методических аспектов изучения темы «Объемы многогранников».

## **Исторические аспекты изучения объемов многогранников и круглых тел**

Орнаментальные узоры, изображающие многогранники встречаются в Шотландии на скульптурных каменных шарах, которые были созданы ориентировочно ещё в конце неолита, по крайней мере за 1000 лет до Платона. В кости, в которые люди играли на заре цивилизации, уже угадываются формы регулярных многогранников.

Первые упоминания о многогранниках датируются около трех тысяч лет до н.э. в Египте и Вавилоне. Примером могут служить знаменитые египетские пирамиды и самая знаменитая из них – пирамида Хеопса. Это обычная пирамида с квадратом у основания со стороной 233 м и высотой 146,5 м. Она словно представляет собой Трактат о геометрии.

Первые геометрические понятия появились еще в доисторические времена. Человек наблюдал различные формы материальных тел в природе: формы растений и животных, горы и обмотки рек, круг и полумесяц и т. д. Однако человек не только пассивно наблюдал за природой, но практически не осваивал и не использовал ее богатства.

В процессе практической деятельности он накапливал геометрическую информацию. Материальные потребности заставляли людей делать инструменты, резать камень и строить дома, резать керамику и натягивать веревку на ковчег. Конечно, десятки и сотни тысяч раз люди натягивали свои луки, делали различные предметы с прямыми краями и так далее, пока постепенно не дошли до абстрактного понятия прямой линии. То же можно сказать и о других основных геометрических понятиях. Практическая деятельность человека легла в основу длительного процесса развития абстрактных понятий, открытия простых геометрических зависимостей и отношений[12].

Начало геометрии было положено в древности для решения чисто практических задач. Со временем, когда накопилось много геометрических

фактов, люди должны были обобщать, понимать зависимость одних элементов от других, устанавливать логические связи и доказательства. Постепенно начала формироваться сама геометрическая наука.

В большой степени правильные многогранники изучались древними греками. Начиная с седьмого века до нашей эры, в Древней Греции были созданы философские школы, в которых осуществлялся постепенный переход от практической геометрии к геометрии философской.

Большое значение в этих школах придавалось рефлексии, с помощью которой были получены новые геометрические свойства. Одной из первых и самых известных школ была школа Пифагора, названная в честь ее основателя Пифагора. Специфическим символом пифагорейцев была пентаграмма<sup>1</sup>. На языке математики это пятиугольник, который не является выпуклым или звездообразным.

Платонические тела представляют собой трехмерные аналоги плоских правильных многоугольников.

Есть только пять выпуклых правильных многогранников: тетраэдр<sup>2</sup>, октаэдр<sup>3</sup> и икосаэдр<sup>4</sup> с треугольными гранями, квадратный куб (гексаэдр) и пятиугольный додекаэдр. Доказательство этого факта известно более двух тысяч лет. Доказательство и изучение этих пяти форм лежит в основании концепций трудов Евклида.

Существует также Семейство платоновских тел, которые представляют собой полурегулярные выпуклые многогранники, или архимедовские тела. Все они имеют равные углы многогранника, все грани являются правильными многоугольниками, но нескольких разных типов.

Некоторые источники, такие как Проклус и Диадокх, приписывают честь своего открытия Пифагору. Другие утверждают, что он знал только тетраэдр, куб и додекаэдр, а честь открытия октаэдра и икосаэдра

---

<sup>1</sup>Пентаграмма - фигура, полученная соединением вершин правильного пятиугольника через одну; фигура, образованная совокупностью всех диагоналей правильного пятиугольника.

<sup>2</sup>Тетраэдр - простейший многогранник, гранями которого являются четыре треугольника.

<sup>3</sup> Октаэдр - многогранник с восемью гранями.

<sup>4</sup> Икосаэдр - правильный выпуклый многогранник, двадцатигранник.

принадлежит Афинскому Теетету, современнику Платона. Во всяком случае, Теетет дал математическое описание пяти правильных многогранников и первое известное доказательство того, что их было ровно пять.

Геометрические знания примерно в объеме современного курса средней школы были описаны около 2200 лет назад в концепциях Евклида. Конечно, геометрия, описанная в «Началах» науки, не могла быть создана одним ученым. Известно, что труд Евклида основывался на трудах десятков предшественников, в том числе Талеса и Пифагора, Демокрита и Гиппократы, Тетей, Евдокса и др. С большим трудом, опираясь на информацию, накопленную тысячелетиями на практике людей, ученым удалось за 3-4 столетия довести науку до высокого уровня совершенства. Историческая заслуга Евклида заключается в том, что, создавая свои «Начала», он объединил результаты своих предшественников, упорядочил и привел в систему основные геометрические знания эпохи.

В течение 2000 лет геометрия изучалась в объеме, описанном в «Началах» Евклида. Многие учебники элементарной геометрии по всему миру представляли (и многие до сих пор это делают) лишь переработку книги Евклида. «Начала» были справочником величайших ученых на протяжении веков.

Греческая математика, впервые зафиксировавшая теорию многогранников, так или иначе, развивалась под большим влиянием Платона. Отличительной особенностью учения Платона является рассмотрение «идеальных» абстракций. Математика, принимая идеи Платона, со времен Евклида изучает абстрактные объекты, «идеалы». Однако сам Платон и многие древние математики вкладывают в понятие «совершенное» не только смысл абстрактного, но и смысл «лучшего». Самая идеальная линия для греков - это прямая или правильная окружность, самый идеальный многоугольник - правильный многоугольник со всеми равными сторонами и углами.

Люди проявляют интерес к регулярным многоугольникам и многогранникам на протяжении всей своей сознательной деятельности, начиная от возраста трехлетнего ребенка, играющего с деревянными кубиками, до зрелого математика. Некоторые из регулярных и полурегулярных тел встречаются в природе в виде кристаллов, другие - в виде вирусов, которые можно увидеть в электронном микроскопе.

В соответствии с традицией древних математиков, среди всех многогранников лучшие те, которые имеют своими гранями правильные многоугольники.

В XVII веке Декарт, используя метод координат, позволил изучить свойства геометрических фигур с помощью алгебры. С этого момента начала развиваться аналитическая геометрия. К XVII-XVIII вв. родилась и развивалась дифференциальная геометрия, которая изучает свойства форм с использованием методов математического анализа.

Одним из последних важнейший вклад в развитие науки о многогранниках сделал в 18 веке Леонард Эйлер<sup>5</sup>. Он «проверил алгеброй гармонию». Теорема Эйлера говорит о соотношении между числом вершин, ребер и граней выпуклого многогранника, доказательство которой Эйлер опубликовал в 1758 г. в «Записках Петербургской академии наук», окончательно навела математический порядок в многообразном мире многогранников.

Начало геометрии было положено в древности при решении чисто практических задач. Со временем, когда накопилось большое количество геометрических фактов, у людей появилось потребность обобщения, уяснения зависимости одних элементов от других, установления логических связей и доказательств. Постепенно создавалась геометрическая наука.

Примерно в VI - V вв. до н. э. в Древней Греции в геометрии начался новый

---

<sup>5</sup>Леонард Эйлер - швейцарский, немецкий и российский математик и механик, внёсший фундаментальный вклад в развитие этих наук (а также физики, астрономии и ряда прикладных наук).



этап развития, что объясняется высоким уровнем, которого достигла общественно-политическая и культурная жизнь в греческих государствах.

В древнеегипетских папирусах, в вавилонских клинописных табличках встречаются правила для определения объема усеченной пирамиды, но не сообщаются правила для вычисления объема полной пирамиды. Определять объем призмы, пирамиды, цилиндра и конуса умели древние греки и до Архимеда. И только он нашел общий метод, позволяющий определить любую площадь или объем. Идеи Архимеда легли в основу интегрального исчисления. Сам Архимед определил с помощью своего метода площади и объемы почти всех тел, которые рассматривались в античной математике. Он вывел, что объем шара, составляет две трети от объема описанного около него цилиндра. Он считал это открытие самым большим своим достижением. Среди замечательных греческих ученых V - IV вв. до н.э., которые разрабатывали теорию объемов, были Демокрит и Евдокс Книдский.

Объем — это вместимость геометрического тела, т. е. части пространства, ограниченной одной или несколькими замкнутыми поверхностями. Вместимость или емкость выражается числом заключающихся в объеме кубических единиц. Процедура измерения объемов аналогична процедуре измерения площадей. При выбранной единице измерения объем каждого тела выражается положительным числом, которое показывает, сколько единиц измерения объемов и частей единицы содержится в данном теле. Ясно, что число, выражающее объем тела, зависит от выбора единицы измерения объемов, и поэтому единица измерения объемов указывается после этого числа. Например, если в качестве единицы измерения объемов взят  $1\text{см}^3$  и при этом объем  $V$  некоторого тела оказался равным 2, то пишут  $V = 2\text{ см}^3$ .

Начиная с 7 века до нашей эры в Древней Греции создаются философские школы, в которых происходит постепенный переход от практической к

философской геометрии. Большое значение в этих школах приобретают рассуждения, с помощью которых удалось получать новые геометрические свойства.

Одной из первых и самых известных школ была Пифагорейская, названная в честь своего основателя Пифагора

Отличительным знаком пифагорейцев была пентаграмма, на языке математики - это правильный невыпуклый или звездчатый пятиугольник. Пентаграмма, на языке математики - это правильный невыпуклый или звездчатый пятиугольник

Пентаграмме присваивалось способность защищать человека от злых духов. Существование только пяти правильных многогранников относили к строению материи и Вселенной. Пифагорейцы, а затем Платон полагали, что материя состоит из четырех основных элементов: огня, земли, воздуха и воды [Ходеева Т. 2002].

Согласно их мнению, атомы основных элементов должны иметь форму различных Платоновых тел. Дальнейшее развитие математики связано с именами Платона, Кеплера, Евклида и Архимеда. Все использовали в своих философских теориях правильные многогранники.

Платоновыми телами называются правильные однородные выпуклые многогранники, то есть выпуклые многогранники, все грани и углы которых равны, причем грани - правильные многоугольники. К каждой вершине правильного многогранника сходится одно и то же число рёбер. Все двугранные углы при рёбрах и все многогранные углы при вершинах правильного многоугольника равны.

Платоновы тела - трехмерный аналог плоских правильных многоугольников. Существует лишь пять выпуклых правильных многогранников - тетраэдр, октаэдр и икосаэдр с треугольными гранями, куб (гексаэдр) с квадратными гранями и додекаэдр с пятиугольными гранями. Доказательство этого факта известно уже более двух тысяч лет; этим доказательством и изучением пяти правильных тел завершаются "Начала" Евклида.

Также существует семейство тел, родственных платоновым - это полуправильные выпуклые многогранники, или архимедовы тела. У них все многогранные углы равны, все грани - правильные многоугольники, но нескольких различных типов.

## **ИЗУЧЕНИЕ ОБЪЕМОВ ТЕЛ В РОССИЙСКОЙ ШКОЛЕ В 30 – 50 ГГ. XX ВЕКА**

Аннотация: в данной главе рассматриваются различные методические приемы изложения темы «Объемы тел», реализуемые в российской школе в первой половине XX века, как в школьных учебниках, так и в экспериментальном обучении. Ключевые слова: объем тела, объем многогранника, объем тела вращения.

Формулы для вычисления объемов многогранников и тел вращения традиционно изучаются в средней школе, так как позволяют познакомить обучающихся с методами математики, а сборник упражнений насытить содержательными метрическими задачами. Однако около самого понятия объема тела и приемов доказательства истинности формул для вычисления объемов различных тел сосредотачиваются непростые математические и методические проблемы. Поскольку именно в этом разделе школьной геометрии взаимодействуют методы различных эпох, то Д. Д. Мордухай-Болтовской (1876 – 1952) – ученый-энциклопедист, один из выдающихся математиков первой половины XX века – в статье, адресованной школьному учительству, анализирует теоретические основы заявленной темы, рассматривает различные способы ее изложения для школьников, выделяя достоинства и недостатки каждого из них [5]. Так, доказательство равновеликости треугольных пирамид с равными высотами и равновеликими основаниями, использующее ступенчатые тела, содержащиеся и содержащие пирамиду, фактически повторяет античный метод исчерпывания, описанный Евклидом, преобразованный Архимедом и несколько видоизмененный Лежандром.

Усовершенствование метода Лежандром Д. Д. Мордухай – Болтовской поясняет учительству на примере вычисления объема цилиндра.

Пусть площадь основания цилиндра равна  $C$ , а высота  $H$ . Требуется доказать, что объем цилиндра равен  $CH$ . Если предположить что этот объем выражается не числом  $CH$ , а большим, то получим, что  $CH$  выражает объем цилиндра, имеющего ту же высоту  $H$ , но меньшее основание, площадь которого можно принять за площадь круга, находящегося внутри основания данного цилиндра и концентричного с ним.

Тогда опишем около этого второго цилиндра призму, целиком содержащуюся в первом цилиндре.

Пусть площадь основания этой призмы равна  $S$ . По свойствам объемов тел, получим:

$$CH > SH \quad (4)$$

Но с другой стороны, площадь  $S$  фигуры, целиком лежащей внутри основания данного цилиндра площадью  $C$ , по свойствам площадей фигур, должна удовлетворять неравенству

$$C < S \quad \text{откуда} \quad CH < SH \quad (5)$$

Сравнение (4) и (5) доказывает невозможность предположения. Невозможность предположения, что объем данного цилиндра выражается числом, меньшим  $CH$ , доказывается аналогично. Для этого достаточно рассмотреть призму, целиком содержащую в себе данный цилиндр.

Дмитрий Дмитриевич подчеркивает, что «выводы формул объемов круглых тел с помощью теорем пределов неизбежны», но предостерегает учителя от выводов этих формул с помощью интегрирования: «... спешка с дифференцированием и интегрированием, требующими практики, которую не может дать средняя школа, не может быть одобрена. Ы элементарную

математику должны войти не формальные операции, а идеи высшей математики» [5, с. 36]

Школьный опыт Д. Д. Мордухай – Болтовского позволил ему отметить трудность для среднего ученика обычного вывода объема шара как предела объема тел, полученных вращением вписанных в круг многоугольников и рассмотреть иные методически приемы доказательства этой формулы.

Некоторые методисты часто склонны использовать метод Кавальери (без доказательства) для обоснования верности формул объемов тел. Однако Дмитрий Дмитриевич считал что происходит отождествление объемов с плоскостями, площадей с линиями [5, с. 38]. Указывая на методические трудности в изложении темы в школьной геометрии, Д. Д. Мордухай – Болтовской подчеркивает, что подчас приходится мириться с неочевидностью некоторых математических фактов для ученика и убеждать его в их истинности... «не с помощью псевдодоказательств, а с помощью эксперимента. ...Но если вспомнить само начало геометрии, доказательство первых теорем о конгруэнции треугольников, то увидим, что по существу мы находимся в том же положении и, накладывая треугольники, вместо того чтобы дать число логическое доказательство, мы экспериментируем» [5, с. 40]. Обратимся к действующим в это время в российской школе учебникам геометрии [2], [3]. В учебнике Н. А. Глаголева [2] определялось понятие объема многогранника. А в учебнике А. П. Кисилева вводилось определение объема произвольного тела: «Величина части пространства, занимаемого геометрическим телом, называется объемом этого тела» [3, с. 220]. Ставилась задача: найти для этой величины выражение в виде некоторого числа, измеряющего эту величину. При этом вводятся следующие допущения:

1. Равные тела, т. е. совмещающиеся при вложении, имеют равные объемы независимо от их положения в пространстве.

2. Объем какого-нибудь тела. Состоящего из частей, принимается за сумму объемов этих частей. 3. Если тела разложены на одинаковое число частей, соответственно друг другу равных. То объемы этих тел считаются равными независимо от того, как расположены эти части относительно друг друга. Тела, имеющие равные объемы, назывались равновеликими.

4. Тела считаются равновеликими и тогда, когда они могут быть дополнены равными телами таким образом, что образуются суммы, равные между собой.

5. Из двух неравновеликих тел объем того тела считается меньшим, которое равновелико какой-нибудь части другого тела.

При доказательстве теоремы об объеме прямоугольного параллелепипеда, в случае, когда хотя бы одно из его измерений выражается иррациональным числом, рассматриваются параллелепипеды, измерения которых являются приближениями по недостатку и по избытку к иррациональному измерению данного параллелепипеда. Тогда первый из них будет целиком содержаться, а второй целиком содержать данный параллелепипед, и измерения их уже будут рациональными числами. Пользуясь методом исчерпывания, свойствами объемов тел и понятием произведения иррациональных тел, получали формулу, позволяющую находить объем прямоугольного параллелепипеда. Вывод формулы объема произвольного параллелепипеда базировался на использовании равновеликости равноставленных тел. Объем пирамиды получался после доказательства равновеликости треугольных пирамид, имеющих одинаковые высоты и равные площади оснований. В свою очередь, последнее утверждение доказывали методом «от противного», сравнивая объемы ступенчатых тел, состоящих из треугольных призмочек, целиком содержащихся в пирамиде и целиком содержащих ее. Из формул, выражающих объемы круглых тел, наибольшие методические трудности встречались в теме «Объем шара и его частей». За величину объема шарового сектора, получаемого вращением вокруг диаметра кругового сектора, принимался предел, к которому стремилась

последовательность объемов тел, образуемых вращением многоугольного сектора, ограниченного двумя радиусами и правильной ломаной линией, вписанной в дугу сектора, при бесконечном увеличении числа ее сторон. Объем шара рассматривался как частный случай объема шарового сектора.

## **Подходы к определению многогранника и его объема**

Определение многогранника является одним из основных понятий курса геометрии. Теория многогранников имеет большое значение, как для теоретических исследований геометрии, так и для практического обучения в различных областях математики, таких как алгебра, теория чисел, естественные науки и т. д.

Под многогранниками в школьном курсе геометрии рассматриваются два важных метода введения: многогранник как поверхность и многогранник как тело. В основном используется второй метод[1].

Окончательное определение концепции многогранника в школе вызывает затруднения, поскольку определение включает в себе такие понятия, как, например: ограничение, внутренние точки, поверхность. В таком случае, разумнее будет дать описание, которое основывалось бы на визуальных представлениях ученика. Проще рассматривать многогранник как тело, поверхность которого состоит из полигонов. При всем этом тело и поверхность можно понимать в визуальном смысле.

В связи с этим это определение может быть сформулировано следующим образом: многогранник представляет собой часть пространства, ограниченную конечным числом многоугольников. Например, в учебнике «Геометрия 10-11» Атанасяна Л.С.: «Многогранник - это поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая некоторое

геометрическое тело». В учебнике «Геометрия 10-11» Погорелова А.В.: «Многогранник - это такое тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников»[11].

В зависимости от визуального представления существует следующее разделение:

1. Подразумевается ограниченная часть пространства, можно сказать, что она ограничена.
2. Многоугольники, которые ограничивают многогранник, содержатся в многограннике. Они образуют его поверхность, так как другая сторона многогранника является его внутренней частью. Из этого можно сделать вывод, что многогранник состоит из поверхности и внутренней части.
3. Многогранник, и даже одна его внутренность составляют одно целое, или, можно сказать, связна: не выходя из многогранника, можно непрерывно пройти от одной ее точки до любой другой.

Рассмотрим простые определения пространства и плоскости. Форма является набором точек. Точка называется предельной точкой данной формы, если есть сколь угодно близко к точкам, которые принадлежат или не принадлежат форме. Точка в форме, которая не является ее предельной точкой, называется внутренней точкой. Множество всех пограничных точек формы называется его границами, а множество всех его внутренних точек называется внутренним пространством.

Замкнутая область характеризуется совокупностью точек, имеющих следующие свойства:

1. Содержит внутренние точки, а ее внутренняя часть соединена.
2. Имеет собственную границу.
3. Совпадает с границей его внутренней части.



Теперь давайте посмотрим на определение многоугольника и многогранника. Многоугольник - это замкнутая область конечных измерений, граница которой образована конечным числом сегментов.

Многогранник-конечномерное тело, граница (поверхность) которого состоит из конечного числа многоугольников. Это взято из определения, основанного на визуальных представлениях, но на данный момент понятия поверхности и тела рассматриваются не только визуально, но и в соответствии с приведенными выше определениями.

Как уже упоминалось выше, многогранник - это не тело, ограниченное многоугольниками, а поверхность, состоящая из них. Употребления термина именно в этом смысле не наблюдается в школьном курсе геометрии. Существует также путаница определений, когда «многогранник» включен в разные значения. Поэтому, когда мы слышим, например.

Обратите внимание, что определение многогранника можно рассматривать с использованием различных методов и методов. Понятие многогранника может быть определено как описательно, так и конструктивно; определение, основанное на визуальном представлении, и строгое определение; многогранник может быть определен как тело и поверхность. При введении понятий выпуклых и правильных многогранников существует также несколько методов и подходов.

Определение объема.

Объем можно определить как функцию  $V$  на множестве многогранников, удовлетворяющую следующим аксиомам:  $V$  сохраняется при движениях.  $V$  удовлетворяет принципу Кавальери. Если внутренности многогранников  $M$  и  $N$  не пересекаются, то  $V(M \cup N) = V(M) + V(N)$ . Объем прямоугольного параллелепипеда  $V = abc$ . Принцип Кавальери (итальянского математика, ученика Галилея). Если при пересечении двух тел плоскостями, параллельными одной и той же плоскости, в сечениях этих тел любой из плоскостей получаются фигуры, площади которых относятся как  $m : n$ ,

то объемы        данных        тел        относятся        как        m        :        n.

## **Методика изучения темы «объем многоугольников и круглых тел»**

Тема «Многогранники» является одним из центральных элементов школьного курса в стереометрии. Многие возможности для развития пространственных представлений открываются с использованием различных наглядных пособий, ТСО.

Ученику требуется около 5 минут, чтобы тщательно завершить чертеж фигуры. Это непродуктивная трата времени. Поэтому иногда, чтобы сэкономить время, учителя допускают неточное и небрежное выполнение рисунка главной фигуры, ориентируясь, например, на построение сечения. Это влияет на качество обучения и в конечном итоге не позволяет проверить качество знаний студентов. Учитель может использовать фильмы. При выполнении такой работы не нужно делать рисунок в блокноте. Однако правильный рисунок будет находиться в поле зрения студентов.

Тему можно разделить на следующие части:

1. Определение многогранника. Элементы многогранника. Выпуклые многогранники.
2. Призмы. Параллелепипеды.
3. Пирамиды.
4. Правильные многогранники.
5. Объемы многогранников.

Изучение курса начинается с введения понятия многогранника. В большинстве учебников она характеризуется как очерченное геометрическое тело с определенными характерными свойствами, только в Афанасьевском она рассматривается как поверхность, состоящая из многоугольников и очерчивающая определенное геометрическое тело. Чтобы ввести понятие,

студентам понадобятся знания из курса планиметрии, который необходимо повторить, а именно: понятие многоугольника, его элементов и выпуклых многоугольников

Особое внимание при изучении призм уделяется учету их особого типа-параллелепипеда. Наибольшие трудности представляют проблемы, связанные с построением и вычислением линейных углов для углов двугранной призмы, углов между краями и гранями. Призма определяется как многогранник, который имеет определенные свойства. В процессе работы над этим понятием необходимо показать модели различных призм, прямых и косых.

Важно отметить, что на изображении призмы боковые края равны параллельным сегментам. В случае прямой призмы боковые края представлены вертикальными сегментами.

В ходе объяснения необходимо сделать выводы об элементах  $n$  – угольной призмы:

1.  $n$  – угольная призма имеет  $n+2$  граней,  $n$  боковых граней.
2.  $n$  – угольная призма имеет  $3n$  ребер,  $n$  боковые ребер.
3.  $n$  – угольная призма имеет  $2n$  вершин.
4.  $n$  – угольная призма имеет  $n(n - 3)$  диагоналей.

Понятие высоты призмы является новым для учащихся, поэтому особое внимание следует уделить построению высоты призмы и определению этого понятия. Полезно отметить на моделях, что в некоторых случаях основание призмы по высоте может упираться в одну из кромок основания или совпадать с боковой кромкой. После введения понятия высоты можно перейти к формулам расчета поверхности призмы и боковой поверхности. Чтобы сформулировать свойства граней и диагоналей параллелепипеда нужно пойти по аналогии со свойствами сторон и диагоналей параллелограмма.

Раздел о правильных многогранниках носит описательный характер. Материал о правильных многогранниках завершает и значительно дополняет раздел. Фактически здесь продолжается классификация многогранников; из выпуклых многогранников выделяются правильные.

В большинстве школьных учебников по геометрии одним из определяющих свойств правильного многогранника является следующее: все его грани являются равными правильными многоугольниками. Для Погорелова это свойство заменяется другим: грани рассматриваемого выпуклого многогранника являются правильными многоугольниками с одинаковым числом сторон. Эти свойства эквивалентны, но первое яснее и проще и, следовательно, легче запомнить. В качестве второго определяющего свойства выбирается одно из следующих:

- в каждой вершине одно и то же число ребер
- в каждой вершине сходится одно и то же число граней
- все многогранные углы равны
- все двугранные углы равны.

## Анализ учебной программы

Анализируя учебную программу по математике, мы видим, что основной целью изучения геометрических свойств тел в пространстве является развитие пространственных представлений учащихся, овладение практически важными геометрическими вычислительными методами, величинами и последующее развитие логического мышления учащихся.

Целью курса является закрепление и развитие навыков и компетенций, сформированных в малом цикле промежуточного цикла, характерных для систематизирующего и обобщающего характера изложения. При доказательстве теорем и устранении ошибок построения в процессе овладения курсом планиметрии активно используются свойства исследуемых геометрических фигур, геометрические преобразования, векторы и координаты[9].

Высокий уровень абстрактности изучаемого материала, логическая жесткость системного изложения связаны с привлечением наглядности и регулярным учетом опыта учащихся на всех этапах учебного процесса. Умение показать видеть наиболее важные моменты в построении геометрических тел, рассчитать их поверхность и объем имеет большое значение в задачах изучения данного курса.

Еще одним способом структурирования школьного курса математики является реализация дифференциации дидактических патентов.

Курс предназначен для учеников, которые рассматривают математику как часть общего образования и не намерены использовать ее непосредственно в своей будущей профессии. Этот курс представлен единой дисциплиной математики, в которой происходит чередование информации из алгебры и анализа геометрических материалов.

Цель изучения курса в 10-11 классах заключается в том, чтобы дать учащимся представление о роли математики в современном мире, о том, как

математика может быть применена в технической и гуманитарной областях нашей повседневной жизни.

При изучении элементов анализа в этом курсе совсем незначительная часть отводится формальным суждениям и тестам, которые основываются на зрительных и интуитивных представлениях учащихся. Изучение геометрического материала зависит от видимости. Акцент на идее создания аксиоматического курса стереометрии был значительно снижен. Особое внимание уделяется обучению, умению применять изученные факты в простых ситуациях.

В модуле «Геометрия» изучение дисциплины «Объем многогранников» в среднем составляет 19 часов. В него входят такие разделы, как: объем прямоугольного параллелепипеда, объемы прямой призмы и цилиндра, объемы наклонной призмы, пирамиды и конуса, объем шара и площадь сферы, объемы шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора.

Учебное пособие И. Ф. Шарыгина реализует авторскую наглядно-эмпирическую концепцию построения школьного курса геометрии. Она характеризуется отказом от аксиоматического метода и акцентом на использование визуальных методов в процессе построения теории и решения задач. Учебник нетрадиционно описывает большое количество необходимых теоретических фактов. Их доказательства оригинальны и, самое главное, красивы. Учебные тексты написаны на хорошем литературном языке.

Теоремы учебника направлены не столько на «прохождение программы», сколько на создание необходимого запаса информации для решения задач. Например, очень интересен раздел «Объемы», в котором содержатся теоремы, обычно не рассматриваемые в школе. Доказательства этих теорем поучительны сами по себе, а их обладание дает кладезь фактов и приемов для решения довольно сложных задач.

Система упражнений в книге позволяет реализовать идею уровня дифференциации. Выделяются задачи, отмеченные звездочкой для

повышения квалификации; выделяются полезные (П), важные (В) и трудные (Т) задачи.

Учебник И. М. Смирнова по профилю естественных наук - один из многих учебников, написанных И. М. Смирновым и В. А. Смирновым. Эти учебники объединены уникальной концепцией авторского подхода к геометрии как научному и учебному предмету, а их различия связаны с учебными задачами, поставленными в конкретном профиле. Так, учебник по профилю естественных наук позволяет углубить знания студентов по геометрии, в нем расширен материал по многогранникам, например, есть теорема Эйлера, учебные пункты, посвященные коррекции, полурегулярные многогранники, Звездные многогранники, многогранники, вписанные в сферу, описанные вблизи сферы и др. Больше внимания уделяется изучению кривых и поверхностей, рассматриваются аналитические методы формообразования. В пространстве используются декартовы, полярные и сферические координаты.

Учебник Александров А. Д. написан кратко и просто, в нем реализован аксиоматический подход к построению курса. В теоретической части учебника авторы выделяют основные теоремы, из которых соответственно получается остальное. Например, в первом абзаце выводится формула объема правого цилиндра, за которой следует представление объема интегралом. Но после абзаца есть задания на объем правой призмы. Таким образом, студенты сами рисуют формулы. В пособии обращается внимание на практическое применение геометрии, ее связь с искусством и архитектурой. Авторы представляют геометрию как живую и эволюционную науку, которая ведет свою историю от египетских землемеров и землемеров Древней Греции. Изложение теоретического материала строго. Четкая структура, высокое научное содержание, доступность изложения, простота и лаконичность-отличительные черты данного пособия. Авторы представляют геометрию как науку, тесно связанную с окружающим миром. Появлению

абстрактного понятия предшествует реальный образ, подтверждающий необходимость этой абстракции.

Для каждого пункта дается набор заданий. Среди них выделяются основные задачи, то есть обязательные для всех. Именно в задачах заложен принцип развития обучения. Указатель тем и ответов окажет большую помощь студентам.

Учебное пособие Александрова по изучению темы «Объемы тел и площади их поверхностей» дается 20 ч и включает такие разделы, как: объем, представление объема интегралом, объемы некоторых тел – цилиндра (в том числе призмы), конуса (в том числе пирамиды), шара; площадь поверхности, площадь сферы, площадь поверхности цилиндра и конуса.

Основная цель состоит в том, чтобы продолжать знакомить студентов с геометрическими величинами.

Устройство для нахождения этих величин взято из курса принципов анализа: интегрирования и вычисления границ. Тонкие вопросы о существовании этих величин требуют обратной связи от учителя. Например, если мы можем вычислить объем шара, каковы причины для нахождения объема его части?

Следует отметить, что только в этом разделе теории учебник содержит утверждения, которые не имеют достаточно полного обоснования, основанного на четко понятых соображениях. Например, постулируется, что любое простое тело имеет объем.

В учебнике И. М. Смирнова и др. реализуется курс, который несколько менее объемный, чем на обычных занятиях, рассчитанный на 2 часа в неделю в течение полутора лет. Она сохраняет основные проблемы традиционной стереометрической программы. Это устраняет ненужные детали и теоремы, которые играют вспомогательную роль.

Гуманитарная направленность курса подкрепляется вопросами исторического, философского и философского характера, рассмотрением прикладных задач геометрии. Курс логически связан и содержит



определения, свойства, теоремы и их доказательства. Видимость играет важную роль.

После теоретического материала появляются задачи самоконтроля над теорией и различные задачи, среди которых важные задачи используются для решения других задач. Целевые главы со списком задач, которые можно использовать для повторения содержания главы.

Так что есть много учебных пособий по геометрии для средней школы. Каждый коллектив авторов добавляет что-то новое в содержание своих учебников, что отличает их от других. Школа и учителя имеют право выбирать тех, кто, по их мнению, даст оптимальный уровень знаний геометрии учащимся данного класса. В общеобразовательных школах, где отсутствует углубленное изучение отдельных предметов, чаще всего используется учебник Атанасяна.

Основной задачей курса является продолжение систематического изучения многогранных и вращающихся тел с целью решения задач расчета их объема. В процессе стереометрии понятие объема вводится аналогично понятию поверхности плоской фигуры, и формируются основные свойства объемов. Наличие и целостность физического объема в школьной математике должно приниматься без доказательств, так как вопрос объема относится к сложным разделам высшей математики. Поэтому необходимые результаты определяются на основе самых наглядных мыслей. Учебный материал, описанный в этой главе, должен быть сначала включен в процесс устранения неполадок.

В начале курса стереометрии изучается основная теоретическая часть, на основе геометрических тел, что в дальнейшем способствует повышению доступности материала, то есть повышает эффективность обучения.

На сегодняшний день в средних классах существует множество учебных пособий по геометрии. Каждый коллектив авторов вносит что-то новое в содержание своих учебников, что отличает их от других. Школа и учителя имеют право, по их мнению, выбирать тех, кто дает ученикам в этих

классах оптимальный уровень знаний геометрии. В целом в школах, где отсутствует углубленное изучение отдельных предметов, часто используется пособие.

Чтение материала программы по теме «многогранники» дает возможность студентам:

- Сформировать представление о степени использования геометрии в различных областях человеческой деятельности, познакомиться с определенными фактами истории геометрии.
- Усвоения систематизированной информации о формах в пространстве.
- Научиться изображать планиметрические и пространственные конфигурации, видеть сходства и различия между свойствами сходных структур в плоскости и пространстве, использовать планиметрическую информацию для описания и изучения пространственных фигур.
- Научиться моделировать и рисовать пространственные формы с помощью проекционной схемы, решать позиционные задачи (особенно секционные) на проекционной схеме.
- Определять поверхности и размеры тела, рассчитывать линейные и угловые элементы пространственной конфигурации.
- Успешно справляться с проблемами тестирования.
- Освоить ряд приемов, наиболее часто используемых для решения задач и стереометрических тестов.

Уровень обязательной подготовки по теме «Объемы многогранников» ограничивается следующими требованиями:

- Распознавание в моделях и описании основных космических тел (призм, пирамид), отражение их основных элементов, распознавание их на окружающих объектах.
- Умением задавать стереометрические условия проектирования при построении.

- Вычисление геометрических величин (длины, поверхности, объема) и использование рассмотренных формул.
- Возможностью решать простые вычислительные задачи с использованием изученных свойств и формул (параллельные свойства прямых и плоскостей, многогранных и вращающихся тел).

Содержание материала по теме «Объемы многогранников» входят разделы:

1. «Объем прямоугольного параллелепипеда».
2. «Объемы прямой призмы и цилиндра».
3. «Объемы наклонной призмы, пирамиды и конуса».
4. «Объем шара и площадь сферы».
5. «Объемы шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора»[14].

Это минимальное требование, которое учащиеся должны усвоить при изучении темы «Объемы многогранников и круглых тел».

## Заключение

Основной задачей усовершенствования образования в России является повышение его доступности и эффективности. Это предполагает точный и рациональный подход ко всему процессу обучения, его модернизацию, согласованием требованиям времени.

Существующий на сегодняшний день традиционный взгляд на содержание математического образования, претерпевает различные изменения и постоянно уточняется. Помимо подготовки учащихся, частью чьей профессиональной деятельности в дальнейшем будет являться математика, одной из основополагающих задач образования является обеспечение определенного нормированного уровня базовой подготовки по математике для всех учащихся, вне зависимости от будущей специальности.

Математическая база необходима человеку в современном мире информации и технологий. Из этого можно сделать вывод, что изучение дисциплины «Объемы фигур» очень актуально, так как это необходимо для изучения смежных дисциплин и для продолжения образования.

Целью данной работы было рассмотрение особенностей методики изучения темы «Многогранники» в курсе геометрии и стереометрии в средней школе. В процессе выполнения работы были реализованы следующие задачи:

- Были рассмотрены особенности освещения темы в учебных пособиях разной направленности: гуманитарной, общеобразовательной, с математическим уклоном.
- Изучены разнообразные подходы к определениям многогранника, выпуклого многогранника и правильного многогранника,
- Сделаны выводы о наиболее рациональном использовании пособий в школе.

Рассмотрение методических особенностей темы «Многогранники» позволило определить, что при подготовке к урокам учитель математики должен учитывать следующее:

1. Особенности изучения частных видов многогранников.
2. Стабильно работающие механизмы подходов к определению самого понятия многогранника: выпуклый многогранник и правильный многогранник.
3. Практика на задачном материале.
4. Анализ темы в действующих школьных учебниках геометрии.

## Список литературы

1. Александров, А. Д. О геометрии [Текст] / А. Д. Александров // Математика в школе. – 1980. – №3. – С. 56.
2. Бескин, Л. Н. Стереометрия [Текст]: кн. для учителя / М.: Просвещение, 1960.
3. Борисов, Н. И. Как обучать математике [Текст]: пособие для учителя / М.: Просвещение, 1979.
4. Долбинин, Н. П. О необходимости курса наглядной геометрии в младших классах [Текст] / Н. П. Долбинин, И. Ф. Шарыгин // Математика в школе. – 1990. – №6. – С. 19.
5. Геометрия 10-11 кл.: учеб. для общеобразовательных учреждений [Текст] / Александров А. Д. [и др.] – М.: Просвещение, 1998.
6. Геометрия 10-11 кл.: учеб. для общеобразовательных учреждений [Текст] / Л. С. Атанасян [и др.] – М.: Просвещение, 2003.
7. Березанская, Е. С. Вопросы стереометрии [Текст]: пособие для учителя / Е. С. Березанская – М.: Просвещение, 1964.
8. Саранцев, Г. И. Цели обучения математике в средней школе в современных условиях [Текст] / Г. И. Саранцев // Математика в школе. – 1991. – №6. – С. 38.
9. Тематическое планирование к учебникам федерального комплекта [Текст] // Математика в школе. – 2002. – №4. – С. 20.
10. Теоретические основы обучения математике в средней школе [Текст]: учебное пособие для ВУЗов / Под ред. Т. А. Ивановой. – Н. Новгород: Изд-во НГПУ. – 2003.
11. Саакян, С. М. Примерное планирование учебного материала по математике в X-XI классах // Математика в школе. - 2005. - №7. - С. 2.
12. Сычева, Е. И. Тесты по стереометрии // Математика в школе. – 2006. – №4. – С. 24.

13. Факультативные курсы по математике 10-11 кл. /Эксперимент.материалы [Текст] / Сост. Ю. М. Колягин. – М.: НИИ школ МНО РСФСР, 1989.
- 14.Гусев, В .А. Дидактические материалы по геометрии для 10 кл. [Текст]: пособие для учителя / В. А. Гусев. - М.: Просвещение, 1979.
- 15.Глаголев, Н. А. Элементарная геометрия: стереометрия для 10-11 кл. ср.шк. [Текст]: в 2ч. / Д. И. Перепелкина. - М.: Просвещение, 1954.-ч. 2.
- 16.Данилюк А.Я., Кондаков А.М., Тишков В.А.. Концепция духовнонравственного развития и воспитания личности гражданина России. - М.: Просвещение, 2009. - 24 с.